Musterlösung der Klausur

Aufgabe 1

a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

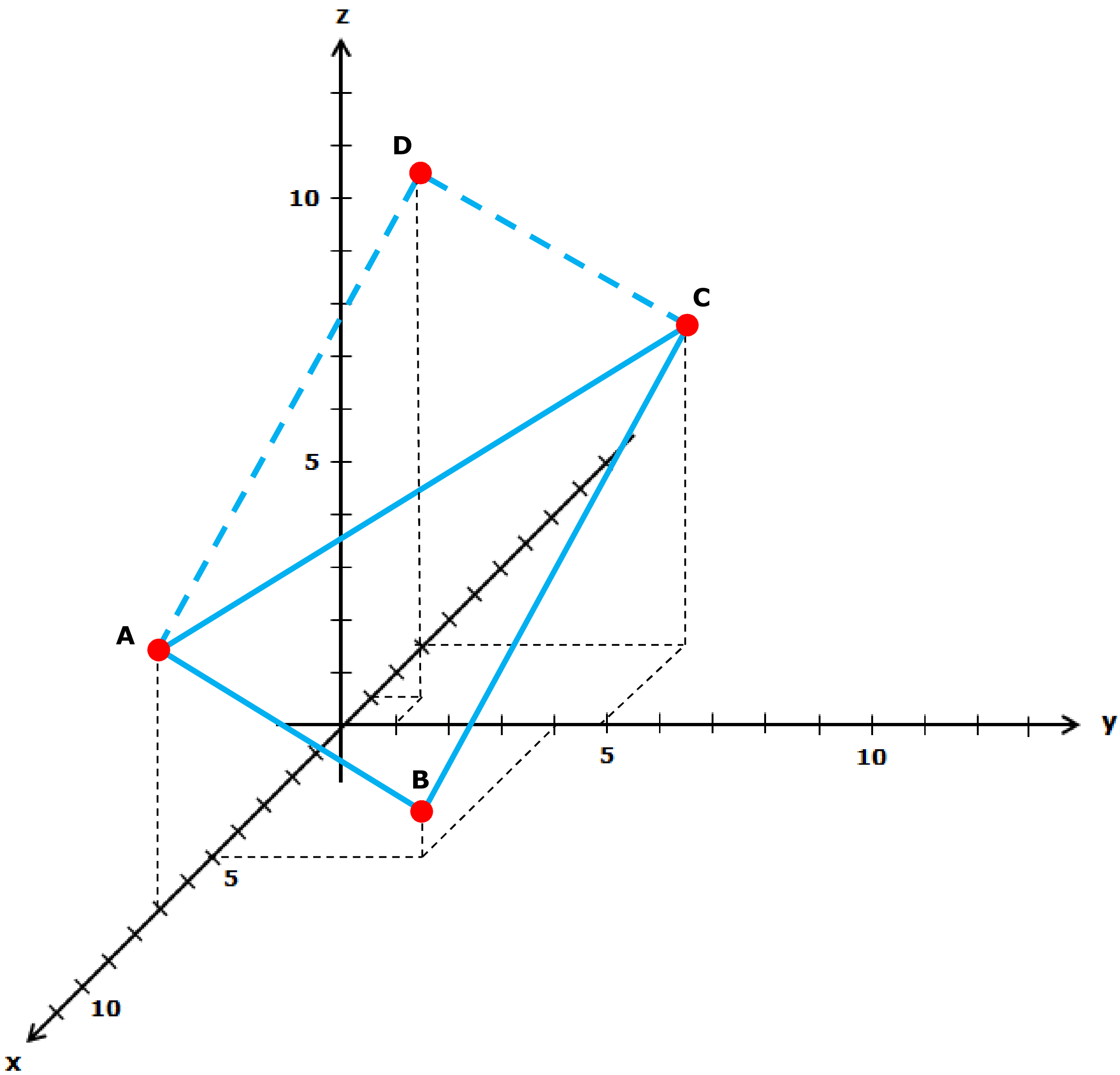
b) $\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $|\vec{a}| - |\vec{b}| = -2$

d) $|\vec{a} - \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{24}$

Aufgabe 2

Teil a)



Teil b) Vorbereitung zur Berechnung des Winkels α: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-10\\5\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-10\\5\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{36}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{126}} \Rightarrow \alpha \approx 57{,}69°$$

Vorbereitung zur Überprüfung des Winkels β: $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-8\\1\\5\end{pmatrix}$

$$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-8\\1\\5\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-8\\1\\5\end{pmatrix}\right|} = \frac{0}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{90}} \Rightarrow \beta = 90°$$

$$\vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}-3\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\10\end{pmatrix}$$

vgl. Skizze!

Aufgabe 3

Teil a)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix} \Rightarrow d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = 9$$

Teil b)

$$\vec{f} = \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}8\\5\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\-1\end{pmatrix}$$

Es gilt also: F(6/6/-1)

Teil c)

$$\overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix}2-z\\8\\-8\end{pmatrix} \Rightarrow 144 = 128 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow z^2 - 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -2;\ z_2 = 6$$

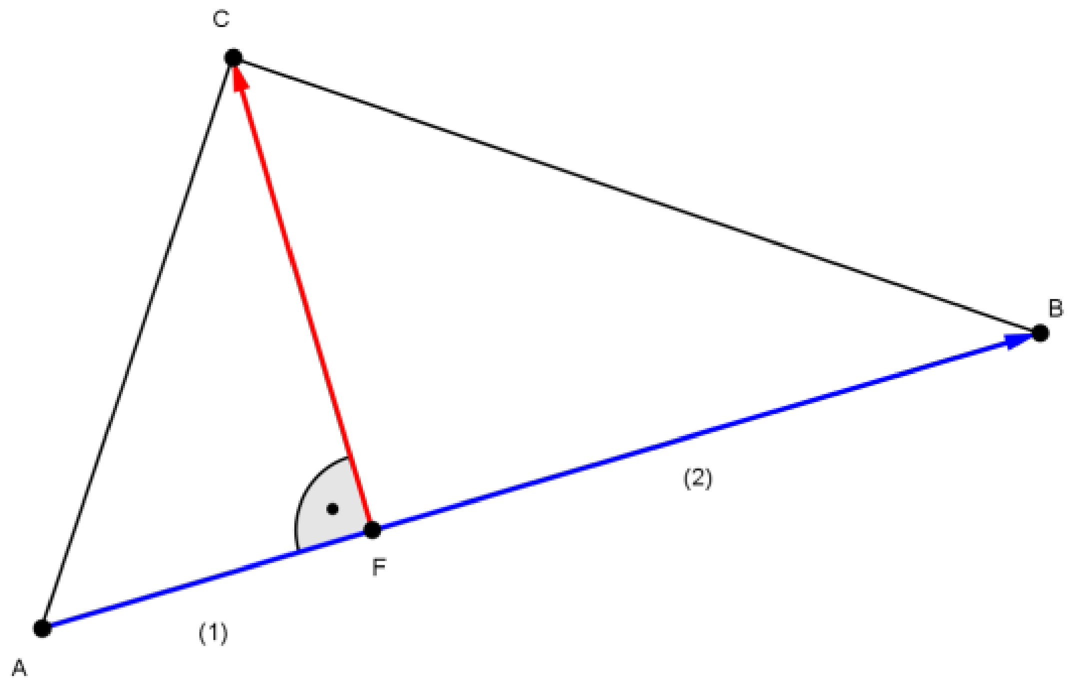
Teil d)

Unter b) wurden die Koordinaten des Höhenfußpunktes F bereits berechnet, es soll also F(6/6/-1) gelten. Die Höhe h_c muss orthogonal zu der Dreiecksseite c verlaufen. Wir können somit einen beliebigen Vektor $\vec{n}$ wählen, der orthogonal zu dem Vektor $\vec{AB}$ verläuft. Alle möglichen Lösungen haben dann die Gestalt: $\vec{c} = \vec{f} + \vec{n}$ (vgl. Skizze).

Beispiel

Da $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ gilt, kann man für $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ etwa wählen, denn $\vec{AB} \circ \vec{n} = 0$.

Es gilt dann: $\vec{c} = \vec{f} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$. C(7/6/-2) ist also eine Lösung!



Aufgabe 4

$\vec{EF} = \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{n+1}\vec{b}$ und $\vec{GC} = \vec{d} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

also: $\vec{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{n+1}\vec{b}\right) + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{2n+1}{2n+2}\vec{b}$

Aufgabe 5

Ansatz : $\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

i) $7 = 2\alpha + 2\beta$

ii) $-6 = -\alpha + 4\beta \Leftrightarrow -12 = -2\alpha + 8\beta$

$-5 = 10\beta \Leftrightarrow$ **$\beta = -0{,}5$ und $\alpha = 4$**

Aufgabe 6

Teil a)

Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, da sie offensichtlich **keine Vielfachen** voneinander sind.

Teil b)

Für k = 4 ist der Vektor $\vec{b}$ offensichtlich das -2-fache des Vektors $\vec{a}$, also sind die beiden Vektoren für k = 4 linear abhängig, anderenfalls linear unabhängig!

Teil c)

Drei Vektoren des **R²** sind stets linear abhängig, da es im R² **höchstens zwei** linear unabhängige Vektoren gibt!

Teil d)

Die Vektoren sind linear abhängig, da der zweite Skalar in der zu untersuchenden Vektorgleichung (vgl. Definition) $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{0} = \vec{0}$ beliebig ungleich null gewählt werden kann.

Aufgabe 7

$\vec{EC} = \vec{c} = \frac{3}{4}\vec{b} + \vec{a}$ und $\vec{BF} = \vec{d} = \vec{b} - \frac{3}{5}\vec{a}$

$$\vec{0} = \alpha\left(\frac{3}{4}\vec{b} + \vec{a}\right) + \beta\left(\vec{b} - \frac{3}{5}\vec{a}\right) - \vec{b}$$

$$= \vec{a}\left(\alpha - \frac{3}{5}\beta\right) + \vec{b}\left(\frac{3}{4}\alpha + \beta - 1\right)$$

Es folgt dann der bekannte Ansatz über die Vektorgleichung für lineare Unabhängigkeit, also:

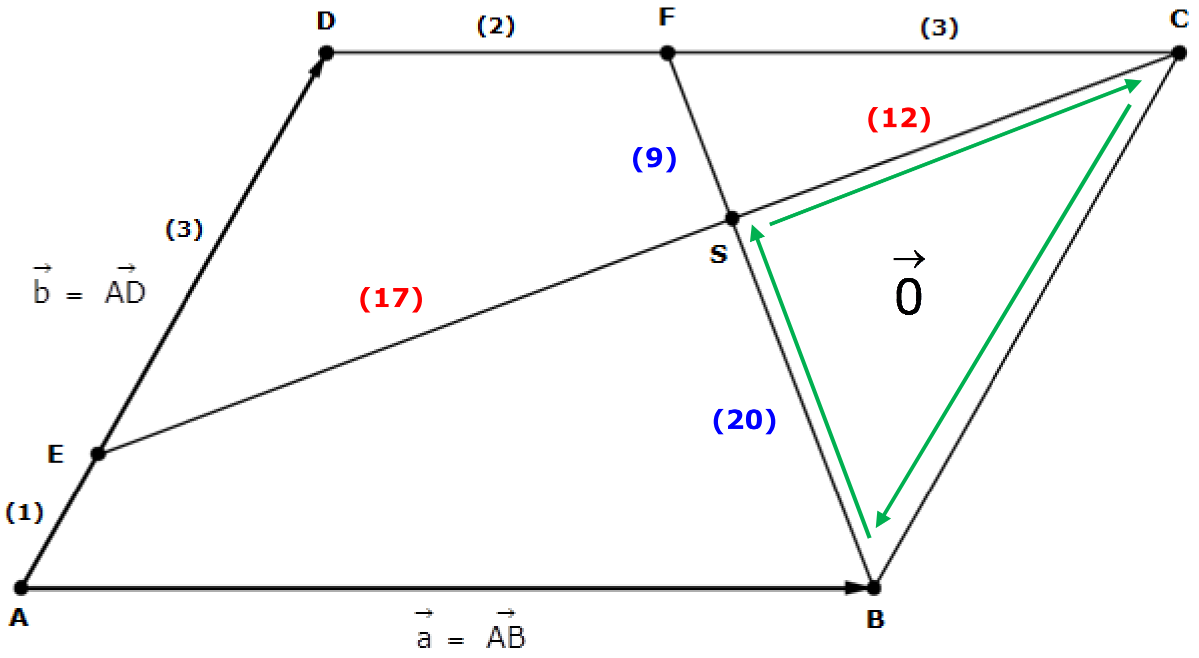
i) $0 = \alpha - \frac{3}{5}\beta$ **und** ii) $0 = \frac{3}{4}\alpha + \beta - 1$

Lösung: $\alpha = \frac{12}{29}$ und $\beta = \frac{20}{29}$

Die Teilverhältnisse lauten dann also 17 : 12 und 9 : 20.

Hinweis

Die gefundenen Teilverhältnisse und der genutzte Vektorzug zur Darstellung des Nullvektors sind in der Skizze auf der folgenden Seite eingezeichnet.



Aufgabe 8

Teil a)

Wir führen eine klassische **Punktprobe** über einen Gleichungsansatz durch:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

i) $4 = -\alpha + 2\beta$

ii) $-3 = 2\alpha + \beta$

iii) $2 = \alpha + 4\beta$

i) + iii) $6 = 6\beta$

$\beta = 1$ und $\alpha = -2$

Gleichung ii) liefert mit diesen Werten eine wahre Aussage! Der Punkt P gehört also zu der Punktmenge!

Teil b)

Die Punktmenge beschreibt eine Ebene im R^3, für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ geht die Ebenengleichung in eine Geradengleichung über! Der zuerst genannte Vektor führt uns in die Ebene, die beiden anderen spannen diese auf!