

## Musterlösung der Klausur Nr. 2

### Aufgabe 1

$$a) f(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x = x \cdot (2 \cdot \ln(x) + 1)$$

$$b) f_k(x) = k \cdot e^{\sin(kx)} \cdot \cos(kx) \cdot k = k^2 \cdot \cos(kx) \cdot e^{\sin(kx)}$$

$$c) f'(x) = 2 \cdot \ln(x^2 + x) \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x}$$

$$d) f'(x) = \frac{-x^2 e^{2-x} - 2x e^{2-x}}{x^4} = \frac{-e^{2-x}(x+2)}{x^3}$$

### Aufgabe 2

$$a) F(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 4e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{a}\cos(ax)$$

$$b) f(x) = 4x^2 + 4x + 1; \text{ also: } F(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x$$

$$c) f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$u'(x) = \cos(x) \Rightarrow u(x) = \sin(x)$$

$$v(x) = \sin(x) \Rightarrow v'(x) = \cos(x)$$

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \sin^2(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$$

$$2 \int \sin(x) \cos(x) dx = \sin^2(x)$$

$$\text{also: } F(x) = \frac{\sin^2(x)}{2}$$

$$d) f(x) = x^n \cdot \ln(x); \text{ wobei } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

$$u'(x) = x^n \Rightarrow u(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int x^n \ln(x) dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{n+1} x^n dx$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \left( \ln(x) - \frac{1}{(n+1)} \right)$$

### Aufgabe 3

Teil a)

P(0/2) und Q(4/6) und  $f_A(x) = mx + b$

$$f_A(0) = 2 \Leftrightarrow b = 2$$

$$m = \frac{6-2}{4-0} = 1$$

also: Modell A:  $f_A(x) = x + 2$

P(0/2) und Q(4/6) und Modell B:  $f_B(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$

$$f_B(0) = 2 \Leftrightarrow b = 2$$

$$f_B(4) = 6 \Leftrightarrow 2a + 2 = 6 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

also: Modell B:  $f_B(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + 2$

P(0/2) und Q(4/6) und  $f_C(x) = a \cdot e^{bx}$

$$f_C(0) = 2 \Leftrightarrow a = 2$$

$$f_C(4) = 6 \Leftrightarrow 6 = 2 e^{4b} \Leftrightarrow 3 = e^{4b} \Leftrightarrow b = \ln(3) : 4 \approx 0,27465$$

also: Modell C:  $f_3(x) = 2 \cdot e^{0,27465x}$

Teil b)

$$d(x) = f_1(x) - f_3(x) = x + 2 - 2e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x}$$

$$d'(x) = 1 - \frac{\ln(3)}{2} e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{\ln(3)}{2} e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x} \Leftrightarrow \frac{2}{\ln(3)} = e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{\ln(3)}\right) \cdot \frac{4}{\ln(3)} \approx 2,18$$

Teil c)

$$V_1 = \int_0^4 (x+2) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^4 = 16 \text{ VE}$$

$$V_2 = \int_0^4 (2\sqrt{x} + 2) dx = \left[ \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x \right]_0^4 = 18 \frac{2}{3} \text{ VE}$$

$$V_3 = \int_0^4 2e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x} dx = 2 \left[ \frac{4}{\ln(3)} e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x} \right]_0^4 \approx 14,5638 \text{ VE}$$

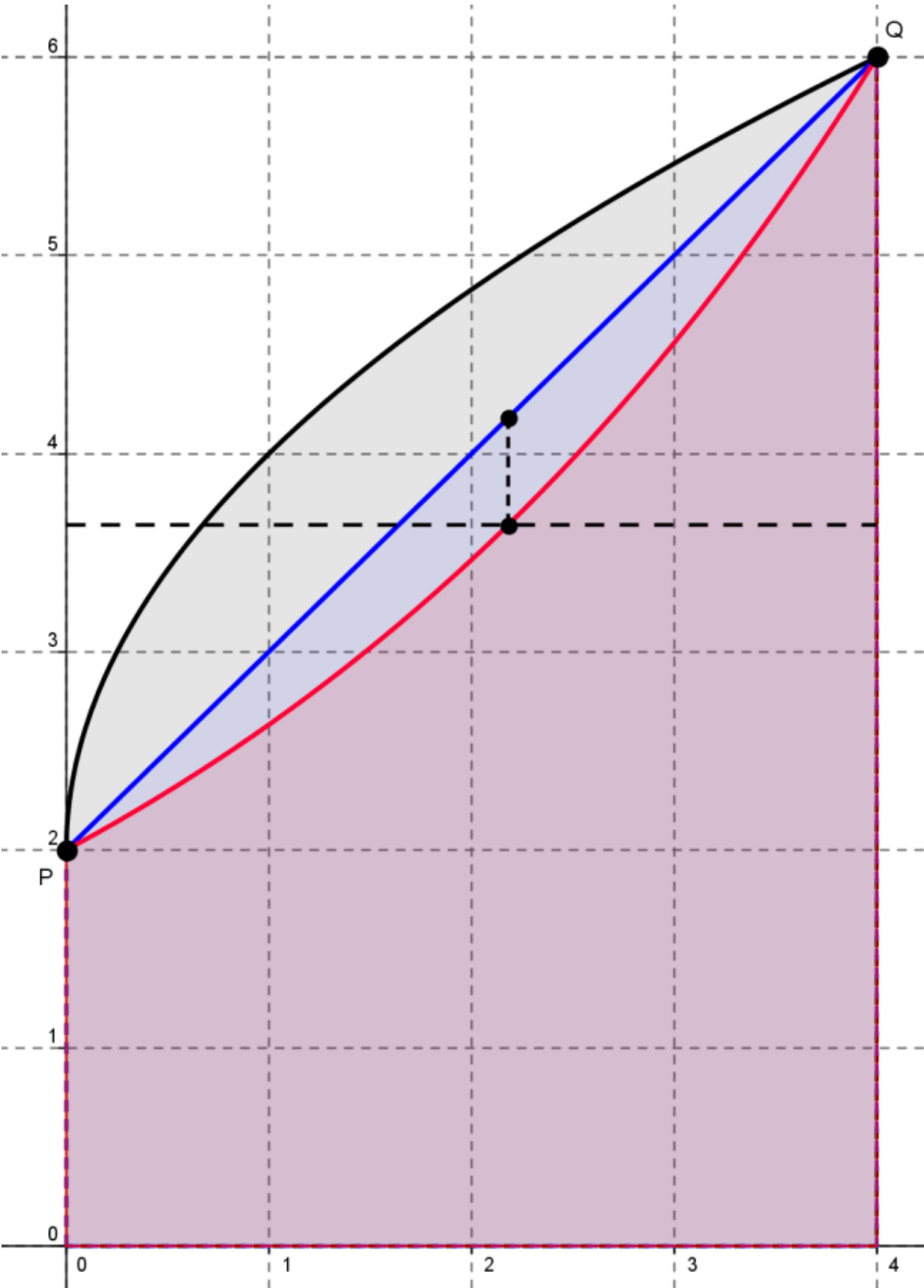
Teil d)

$$m = \frac{1}{4} \cdot \int_0^4 2e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x} dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{\ln(3)} e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x} \right]_0^4 \approx 3,641$$

Dies ist die über dem Intervall I **durchschnittlich** ausgetretene Gasmenge!

Die Skizze auf der folgenden Seite veranschaulicht nochmals sämtliche Ergebnisse dieser Aufgabenstellung!

Skizze



#### Aufgabe 4

$$P(1/4e^{-a})$$

$$f'(x) = -4ae^{-ax}; \text{ also } f'(1) = -4ae^{-a}$$

$$t(x) = -4ae^{-a}x + b$$

$$4e^{-a} = -4ae^{-a} + b \Leftrightarrow b = 4e^{-a} + 4ae^{-a} = 4e^{-a}(1 + a)$$

$$t(x) = -4ae^{-a}x + 4e^{-a}(1 + a)$$

$$\text{Nullstelle von } t: 4ae^{-a}x = 4e^{-a}(1 + a) \Leftrightarrow x = 4e^{-a}(1 + a) : 4ae^{-a} = 1 + \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 4e^{-ax} dx + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{a} - 1\right) \cdot 4e^{-a} = -\frac{4}{a} \left[ e^{-ax} \right]_0^1 + \frac{2}{a} e^{-a} = -\frac{4}{a} e^{-a} + \frac{4}{a} + \frac{2}{a} e^{-a} \\ &= \frac{4}{a} - \frac{2}{a} e^{-a} = \frac{2}{a} \cdot (2 - e^{-a}) \end{aligned}$$

#### Aufgabe 5

Teil a)

$$\cos(x) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Teil b)

$$f'(x) = -\sin(x) \cdot e^x + \cos(x) \cdot e^x = e^x \cdot (\cos(x) - \sin(x))$$

$$e^x \cdot (\cos(x) - \sin(x)) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \tan(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Bezüglich des betreffenden Intervalls liegt der einzige Kandidat also bei  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Für die y-Koordinate gilt näherungsweise  $y \approx 1,55$

Teil c)

$$u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x$$

$$v(x) = \sin(x) \Rightarrow v'(x) = \cos(x)$$

$$\text{also: } \int \sin(x) \cdot e^x dx = \sin(x) \cdot e^x - \int \cos(x) \cdot e^x dx$$

**somit insgesamt:**

$$\begin{aligned} \int \cos(x) \cdot e^x dx &= \cos(x) \cdot e^x + \int \sin(x) \cdot e^x dx \\ &= \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x - \int \cos(x) \cdot e^x dx \end{aligned}$$

**daraus folgt:**

$$2 \cdot \int \cos(x) \cdot e^x dx = \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x$$

$$\Leftrightarrow \int \cos(x) \cdot e^x dx = \frac{1}{2} e^x \cdot (\cos(x) + \sin(x))$$

**Auswertung:**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot e^x dx = \frac{1}{2} \cdot \left[ e^x (\sin(x) + \cos(x)) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2,51 \text{ FE}$$